

К ДЕМОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМЕРТНОСТИ

В. Ф. ШУКАЙЛО

(Харьков)

Количественные, специализированные по целям теории смертности населения имеют существенное значение при анализе функционирования больших демографических систем (БДС) [1]. Возникающие здесь проблемы многообразны: в производственном аспекте — прогнозирование численности и возрастной структуры трудовых ресурсов; в демоэкономическом — расчет сальдо продуктивности населения в продольных и поперечных временных разрезах; в социально-психологическом, гигиеническом — оценки скрытых (латентных) параметров существования (средние частоты стрессов, их средний уровень, вариабельность и др.); в медико-биологическом — определение эффективности экспериментальных методов управления процессами старения, доминирующих в международной геронтологической программе; в общенаучном — математическое отображение сущности одного из фундаментальных демографических процессов, усиление операциональных и инспекционных возможностей теории.

Структура любой возможной количественной теории смертности определяется характером аналитических преобразований, степенью расшифровки функций выживания. Поэтому данная работа посвящена в основном демоэкономическим и статистическим аспектам функций выживания $l(x, t)$ с акцентом на неформальном демографическом моделировании (систематизация ряда попыток, в том числе и автора статьи). Теоретические соображения проверяются на материалах двух последних переписей в СССР, а также переписей других стран.

1. КОГОРТНАЯ ФУНКЦИЯ ВЫЖИВАНИЯ $l(x, t)$ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СМЕРТНОСТИ

Функция $l(x, t)$ — доля проживших более x лет из числа родившихся живыми в момент t ; $l(0, t) = 1$, $l(\infty, t) = 0$, $l(x, t-x)$ может и не быть монотонно убывающей по возрасту x (см. [2]); $l(x, t)$ связывает два основных в естественном движении закрытой демографической системы (ДС) потока рождений и смертей с интенсивностями $n(t)$, $m(t)$, единиц в год.

$$m(t) = \int_{-\infty}^t n(z) \frac{\partial l(t-z, z)}{\partial t} dz. \quad (1)$$

Для этих потоков имеют, по-видимому, смысл понятия ординарности, нестационарности, последействия [3]. Ординарность нарушается в БДС обычно слабо (в рождаемости — близнецами, в смертности — массовыми катастрофами). Эволюционное время t в $l(x, t)$ достаточно «медленное», что позволяет относить родившихся на протяжении года и более к фиксирован-

ному моменту, обеспечивая достаточную многочисленность когорты. Пусть x_1, \dots, x_N — упорядоченная последовательность ($x_i < x_{i+1}$) длительностей жизни элементов когорты. Эмпирическая функция выживания $\tilde{l}(x)$ монотонно убывает $1/N$ -скачками в точках x_i . Заштрихованная на рис. 1 площадь составляет x_i/N , и, следовательно, вся площадь под графиком $\tilde{l}(x)$ равна эмпирической средней длительности жизни $\bar{\mu}_1$. Непосредственное рассмотрение фактологии x_1, \dots, x_N позволяет установить ряд полезных выражений, например, для функции дожития $\tilde{l}(x, y) = \tilde{l}(x+y)/\tilde{l}(y)$, что

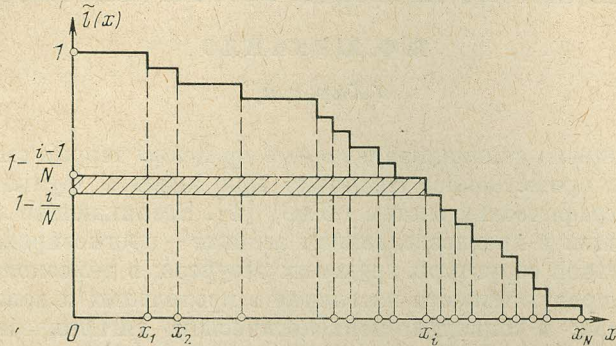


Рис. 1. Эмпирическая когортная функция выживания $\tilde{l}(x)$

использовалось еще Эйлером, ввести коэффициенты гибели $\tilde{q}(x, x+\tau)$, равные отношению $[\tilde{l}(x) - \tilde{l}(x+\tau)]/\tilde{l}(x)$, и др.

Однако для теоретического анализа необходима модельная интерпретация фактологии x_1, \dots, x_N . Наиболее гибкой и отвечающей существу жизнедеятельности представляется вероятностная интерпретация x_1, \dots, x_N как упорядоченной выборки значений непрерывной случайной величины из некоторой (гипотетической) генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ длительностей жизни. Введем в соответствии с полиномиальным распределением безусловную вероятность $p(v, k)$ v смертей в $[0, x]$ и k в $[x, x+\tau]$

$$p(v, k) = \frac{N!}{v!k!(N-v-k)!} F^v(x) [F(x+\tau) - F(x)]^k [1 - F(x+\tau)]^{N-v-k}. \quad (2)$$

Безусловная вероятность v смертей в $[0, x]$ получается из (2) суммированием по k от 0 до $N-v$ как распределение Бернулли

$$p(v) = C_N^v F^v(x) [1 - F(x)]^{N-v}. \quad (3)$$

Деля (2) на (3), найдем условную вероятность $p(k|v)$ k смертей в $[x, x+\tau]$, если в $[0, x]$ их было v

$$p(k|v) = \frac{p(v, k)}{p(v)} = C_{N-v}^k \left[\frac{F(x+\tau) - F(x)}{1 - F(x)} \right]^k \left[\frac{1 - F(x+\tau)}{1 - F(x)} \right]^{N-v-k}, \quad (4)$$

где $p(k|v)$ — также распределение Бернулли, и, следовательно, для возрастной эмпирической частоты гибели $\tilde{q}(x, x+\tau)$ можно получить выражение математического ожидания q , коэффициентов вариации δ , асимметрии A и эксцесса E

$$q = q(x, x+\tau) = \frac{F(x+\tau) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{\tilde{l}(x) - \tilde{l}(x+\tau)}{\tilde{l}(x)}, \quad (5)$$

$$\delta = C_1(q) / \sqrt{N-v}, \quad A = C_2(q) / \sqrt{N-v},$$

$$E = C_3(q) / (N-v), \quad (6)$$

$$C_1(q) = \sqrt{\frac{1}{q} - 1}, \quad C_2(q) = (1-2q) / \sqrt{q(1-q)},$$

$$C_3(q) = [q(1-q)]^{-1} - 6. \quad (7)$$

В табл. 1 даны значения $C_i(q)$. Диапазоны q : $[10^{-3}, 10^{-1}]$, $[10^{-2}, 0,5]$ при $\tau=1$ и $\tau=5$ соответствуют основным возрастам $[20, 80]$, для которых в БДС при $N-v > 10^4$ распределение \tilde{q} оказывается практически гауссовским ($\delta, |A| < 0,3, |E| < 0,1$), хотя и непосредственно не наблюдаемым (уникальность, неповторимость выборки $(x, x+\tau|t)$). Это обстоятельство упрощает оценку степени аномальности флуктуаций $\tilde{q}(x, x+1)$, например, по вероятностным характеристикам разностей смежных частот $\tilde{q}(x+1, x+2) - \tilde{q}(x, x+1)$. Обычно в БДС $\tilde{q}(x, x+1)$ монотонно возрастает (с теми или иными неправильностями), начиная с возраста $x=8 \div 12$ лет, но иногда наблюдаются и явные аномалии, когда $\tilde{q}(x+1, x+2) - \tilde{q}(x, x+1) < 0$. Если априорная вероятность аномалии велика, то природу флуктуации \tilde{q} следует истолковать как статистическую, если мала — как социально-биологическую. Вообще развитие флуктуационной теории роста $\tilde{q}(x, x+\tau)$, уточнения бернулливости смертей на возрастных интервалах представляется перспективным хотя бы в целях увеличения объема объективной информации, извлекаемой из данных статистики. Удобная и чувствительная возрастная характеристика смертности — « λ -характеристика» $\lambda(x)$ — «сила смерти» в демографии, «интенсивность отказов» в теории надежности. Зависимость $\lambda(x)$ можно определить и как модуль темпа убывания $l(x)$, и как предел отношения условной вероятности смерти $q(x, x+\tau)$ к τ при $\tau \rightarrow 0$

$$\lambda(x) = \left| \frac{d}{dx} [\ln l(x)] \right| =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{q(x, x+\tau)}{\tau} = - \frac{l'(x)}{l(x)}. \quad (8)$$

Естественно, $\lambda(x)$ определена в точках, где $l(x) > 0$. В этих же точках $\lambda(x)$ непрерывна, если непрерывна плотность распределения $f(x) = -l'(x)$. Из определения $\lambda(x)$ следуют полезные неравенства: $\lambda(x) < \tau^{-1}q(x, x+\tau)$, если $[x, x+\tau]$ принадлежит области возрастания $f(x)$, и $\lambda(x) > \tau^{-1}q(x, x+\tau)$, в случае убывания.

Таблица 1
Функции $C_i(q)$ для коэффициентов вариации, асимметрии, эксцесса эмпирической возрастной частоты гибели

C_i	q																
	0	0,001	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,99	0,999	1
C_1	$+\infty$	31,6	9,95	4,36	3	2	1,53	1,22	1	0,82	0,66	0,5	0,33	0,23	0,10	0,0316	0
C_2	$+\infty$	31,6	9,85	4,13	2,67	1,5	0,87	0,41	0	-0,41	-0,87	-1,5	-2,67	-4,13	-9,85	-31,6	$-\infty$
C_3	$+\infty$	995	95	15,1	5,11	0,25	-1,24	-4,83	-2	-4,83	-1,24	0,25	5,11	151	95	995	$+\infty$

С учетом (8) преобразуем (5) для $q(x, x+\tau)$

$$q(x, x+\tau) = 1 - \exp \left[- \int_x^{x+\tau} \lambda(z) dz \right]. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по x , имеем также

$$\frac{\partial q}{\partial x} = [\lambda(x+\tau) - \lambda(x)] \exp \left[- \int_x^{x+\tau} \lambda(z) dz \right]. \quad (10)$$

Из (9) следует, что при $x \rightarrow \infty$ $q \rightarrow 1$, если $\lambda \rightarrow \infty$, и $q \rightarrow q_* < 1$, если $\lambda \rightarrow \lambda_* < \infty$, а из (10) — монотонный рост q при $\lambda(x+\tau) > \lambda(x)$. Характеристикой, связанной с λ и q и часто первичной, является коэффициент смертности m , равный отношению математических ожиданий числа умерших в $(x, x+\tau)$ и суммарного времени жизни в $(x, x+\tau)$ данной когорты

$$\frac{1}{\tau} q(x, x+\tau) < m(x, x+\tau) = \frac{l(x) - l(x+\tau)}{\int_x^{x+\tau} l(z) dz} < \frac{1}{\tau} \frac{q(x, x+\tau)}{1 - q(x, x+\tau)}. \quad (11)$$

Двустороннее неравенство для m получается заменой $l(z)$ в интеграле (11) на $l(x)$ и $l(x+\tau)$. Так как $q(x, x+\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, то из (11), (8) следует, что $m(x, x+\tau) \rightarrow \lambda(x)$ при $\tau \rightarrow 0$ ($m'_\tau(0) = 1/2\lambda'(x)$). Если $\lambda(x) \rightarrow \lambda_* \leq \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то и $m(x, x+\tau) \rightarrow m_* = \lambda_*$ (независимо от τ). Если $\lambda(x)$ возрастающая, то всегда $\lambda(x+\tau) > m(x, x+\tau) > \lambda(x)$, причем $\frac{\partial m}{\partial \tau} > 0$. Соотношения

между m , q , λ уточняют возрастные ограничения ряда практических процедур оценки \tilde{m} , \tilde{q} , $\tilde{\lambda}$. Подробное обсуждение других взаимосвязей m , q , λ и, в частности, учет кривизны $l(z)$ в $[x, x+\tau]$ при $\tau=1$ содержится в [4].

Для статистических точечных оценок $\tilde{\lambda}(x)$ целесообразны следующие соотношения между q , l и λ

$$\frac{1}{\tau} \int_x^{x+\tau} \lambda(z) dz = - \frac{1}{\tau} \ln[1 - q(x, x+\tau)] = \frac{1}{\tau} [\ln l(x) - \ln l(x+\tau)] = \lambda(\xi), \quad (12)$$

$$x < \xi < x+\tau, \quad l(x+\tau) > 0.$$

Заменяя в (12) q на \tilde{q} или l на \tilde{l} , получаем точечную (состоятельную, хотя и смещенную) оценку $\tilde{\lambda}$ для $\lambda(\xi)$. Дополнительная к статистической относительная погрешность возникает при замене $\xi = x + 0,5\tau$ и составляет для демографических расчетов обычно малую величину порядка $(0,02 \div 0,03)\tau^2$. При $\tau=2$ эта погрешность не превосходит 0,1%, а $\tau=5 \div 1\%$. Аналогичная методика оценки $\tilde{\lambda}$, правда, по двум смежным $\tilde{q}(x-\tau, x)$ и $\tilde{q}(x, x+\tau)$, предложена нами в [2, 5] и проверена как на технических, так и демографических моделях. Тот же порядок погрешности (исключая самые большие возрасты) имеем для процедуры точечной оценки λ из соотношения

$$\frac{l(x) - l(x+\tau)}{\tau l(\eta)} = \lambda(\eta), \quad x < \eta < x+\tau, \quad (13)$$

при замене l на \tilde{l} и $\eta \approx x + 0,5\tau$. Лишь для самых больших возрастов процедура (13) существенно менее точна, чем (12). В статистическом же смысле процедура (12) предпочтительней, чем (13), всюду, так как $\tilde{\lambda}(\xi) -$

однозначная, монотонно возрастающая функция одного частотного параметра $\tilde{q}(x, x+\tau)$, а также линейная от $\ln \tilde{l}(x)$ и $\ln \tilde{l}(x+\tau)$. Оценки поправок на смещение, доверительных интервалов, трендов $\lambda(x)$ по $\tilde{\lambda}(x)$ — важные как для демографии, так и для теории надежности «технологические» вопросы, рассмотрение которых вполне возможно в рамках общих идей статистики [6].

Существенный общий вопрос — влияние неоднородности когорты, описываемое моделью смеси различных генеральных совокупностей. Пусть p_i — вес отдельной совокупности на момент формирования когорты ($0 < p_i < 1$). Тогда

$$l(x) = \exp[-\Lambda(x)] = \sum_i p_i l_i(x) = \sum_i p_i \exp[-\Lambda_i(x)], \quad (14)$$

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(z) dz, \quad \Lambda_i(x) = \int_0^x \lambda_i(z) dz, \quad (15)$$

$$\Lambda(x) = -\ln \left\{ \sum_i p_i \exp[-\Lambda_i(x)] \right\} = \ln \{ \mu_{-1}[\exp(\Lambda_i(x))] \}. \quad (16)$$

Так как среднее гармоническое μ_{-1} меньше среднего геометрического μ_0 , то из (16) сразу следует, что $\Lambda(x)$ не превосходит среднего арифметического μ_{+1} из $\Lambda_i(x)$. Отсюда

$$\lambda(x) = \frac{\sum_i p_i l_i(x) \lambda_i(x)}{\sum_i p_i l_i(x)} = \sum_i c_i(x) \lambda_i(x) \leq \sum_i p_i \lambda_i(x), \quad (17)$$

$$c_i(x) = p_i l_i(x) \left[\sum_i p_i l_i(x) \right]^{-1}, \quad c_i(0) = p_i, \quad \sum_i c_i(x) = 1.$$

Это неравенство отражает действие естественного отбора, снижающего вес элементов с высокими $\lambda_i(x)$ и повышающего — с низкими в процессе вымирания когорты.

Если ввести функции Гомпертца $G_i(x) = \ln \lambda_i(x)$, $G(x) = \ln \lambda(x)$ и темпы k_i , k соответствующих « λ -характеристик»

$$k_i = \frac{\lambda_i'}{\lambda_i} = G_i', \quad k = \frac{\lambda'}{\lambda} = G', \quad k_i > 0, \quad k > 0, \quad (18)$$

то из условий $k_i = \text{const}$ (гипотеза Гомпертца) следует, что $k = \text{var}$. Вообще, из одного только факта «врожденной» неоднородности когорты (по λ_i) вытекает необходимость отклонений $G(x)$ от линейности. В общем случае необходимо учитывать не только «врожденные» внутрикортные различия, но и эволюцию социально-биологических условий существования, вводя историческое время t (начало отсчета для когорты) и рассматривая интенсивность потока смертей (плотность распределения длительностей жизни) как функцию $f(x, t)$. Тогда

$$\lambda(x, t) = f(x, t) \left[1 - \int_0^x f(\xi, t) d\xi \right]^{-1}. \quad (19)$$

Если социально-биологическим условиям предсмертных состояний придавать основную роль, то $f(x, t) = \psi(x, t+x)$, однако и тогда для $\lambda(x, t)$ специализация аргументов x и t более сложна и может быть осуществлена лишь в рамках демографических биостатистических моделей.

2. КОГОРТНЫЕ ФУНКЦИИ ВЫЖИВАНИЯ $l(x, t)$ И ВОЗРАСТНАЯ СТРУКТУРА НАСЕЛЕНИЯ

Плотность распределения возрастов x на момент t для контингента населения ($0 \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq \infty$) в закрытых ДС

$$\varphi(x, t, \alpha, \beta) = n(t-x)l(x, t-x)P^{-1}(t, \alpha, \beta), \quad (20)$$

$$P(t, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} n(t-x)l(x, t-x)dx, \quad (21)$$

где $P(t, \alpha, \beta)$ — численность контингента $[\alpha, \beta]$, а $P(t, 0, \infty)$ — всего населения в момент t . Пусть $\eta(t, \alpha, \beta)$ — доля контингента $[\alpha, \beta]$ во всем населении,

$$\eta(t, \alpha, \beta) = P(t, \alpha, \beta)P^{-1}(t, 0, \infty). \quad (22)$$

Вводя темпы k_p (логарифмические производные по t) для численностей контингентов $[\alpha, \beta]$ и $[0, \infty]$, представим темп k_η для $\eta(t, \alpha, \beta)$

$$k_\eta(t, \alpha, \beta) = k_p(t, \alpha, \beta) - k_p(t, 0, \infty). \quad (23)$$

Темп для (21)

$$k_p(t, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, t, \alpha, \beta)k_{n,i}(x, t-x)dx. \quad (24)$$

Здесь

$$k_{n,i}(x, t-x) = k_n(t-x) + k_i(x, t-x), \quad (25)$$

$$k_n(t-x) = \frac{\partial}{\partial t} \ln n(t-x), \quad k_i(x, t-x) = \frac{\partial}{\partial t} \ln l(x, t-x). \quad (26)$$

В частности, для стабильного населения с постоянным темпом рождаемости ($k_n = k$) и нулевым темпом эволюции смертности ($k_i = 0$) имеем $k_p(t, \alpha, \beta) = k$, а $k_\eta(t, \alpha, \beta) = 0$. Для современных процессов демографического перехода со сложными трендами изменения рождаемости и смертности особое значение имеет множество точек (α, β) нулевого уровня функции $k_\eta(t, \alpha, \beta)$. Оказывается, что при весьма общих условиях существует однозначная линия постоянного уровня $\beta = \beta(\alpha)$, разбивающая контингенты (α, β) на две области с темпами роста меньшими и большими, чем темп роста населения в целом. Дифференцируя по α уравнение $k_\eta(t, \alpha, \beta(\alpha)) = 0$ и учитывая (20) — (24), получим

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\varphi(\alpha, t, \alpha, \beta) k_{n,i}(\alpha, t-\alpha) - k_p(t, 0, \infty)}{\varphi(\beta, t, \alpha, \beta) k_{n,i}(\beta, t-\beta) - k_p(t, 0, \infty)}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что чаще всего линия нулевого уровня $\beta(\alpha)$, если она однозначна, монотонно убывает по α . Действительно, $\beta'(\alpha) < 0$, если $k_{n,i}(x, t-x)$ имеет монотонно убывающий (возрастающий) тренд $b[t-\beta, t-\alpha]$. Условие $\beta'(\alpha) < 0$ сохраняется с высокой вероятностью и при наложении на тренд $k_{n,i}(x, t-x)$ нерегулярных флуктуаций.

Критерий демозкономической гармонизации процесса воспроизводства населения — близость контингентной точки [15, 65] к линии нулевого уровня $\beta(\alpha)$. Из уравнений (20) — (27) следует, что при продольном анализе роль темпов $k_n(t-x)$ и $k_i(x, t-x)$ симметрична и некоторое снижение темпа рождаемости может (в принципе) компенсироваться соответствующим

ющим изменением в смертности. Более отчетливо влияние характеристик функций выживания $l(x)$ на возрастную структуру $\varphi(x, \alpha, \beta)$ просматривается в поперечном анализе с условным использованием модели стабильного населения ($k_n=k, k_i=0$). Тогда

$$\varphi(x, \alpha, \beta) = \frac{l(x) \exp(-kx)}{\int_{\alpha}^{\beta} l(x) \exp(-kx) dx}, \quad 0 \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq \infty. \quad (28)$$

Для доли $\eta(\alpha, \beta)$ (22) контингента ($\alpha \leq x \leq \beta$) во всем населении имеем

$$\eta(\alpha, \beta) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} l(x) \exp(-kx) dx}{\int_{\infty}^{\infty} l(x) \exp(-kx) dx}. \quad (29)$$

Введя, как в [1], средний возраст всех живущих $c_1(0, \infty|k)$ и соответственно средний возраст $c_1(\alpha, \beta|k)$ для контингента $[\alpha, \beta]$, получаем дифференцированием (29)

$$\frac{\partial \eta}{\partial k} = [c_1(0, \infty|k) - c_1(\alpha, \beta|k)] \eta(\alpha, \beta|k). \quad (30)$$

Средние возрасты обычно исчисляются численными приближенными методами на основе $\varphi(x, \alpha, \beta)$, как, например, в [7]. По-видимому, более обозримые и точные выражения для $c_1(0, \infty|k)$ можно получить, используя разложение по моментам μ_k длительности жизни [1]

$$c_1(0, \infty|k) = \frac{1}{2} \mu_1 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1^2} + \frac{2}{\mu_1^3} \left(\frac{\mu_2^2}{3} - \frac{\mu_3 \mu_1}{4} \right) k + \dots \right]. \quad (31)$$

С увеличением k средний возраст населения уменьшается (омоложение) [1]. Выражение в квадратных скобках является функцией от коэффициентов вариации δ , асимметрии A распределения $l(x)$ и параметра $k\mu_1$ и обычно при значениях $|k|$ около 0,01 мало отличается от 1. Используя разложение $\eta(\alpha, \beta|k)$ относительно точки $k=0$ (стационарное население), имеем

$$\eta(\alpha, \beta|k) = \eta(\alpha, \beta|0) \left\{ 1 + \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1} - c_1(\alpha, \beta|0) \right] k + \dots \right\}. \quad (32)$$

Заметим, что прогресс в снижении смертности (сейчас биологически обусловленной, эндогенной по терминологии Пресса [8]) формально эквивалентен (см. (29)) снижению темпа k при переходе от $l(x, t_1)$ к $l(x, t_2) > l(x, t_1)$. Следовательно, одно из частных условий демоэкономической гармонизации сводится к требованию максимальной устойчивости $\eta(\alpha, \beta|k)$ относительно изменений темпа k при $\alpha=15, \beta=65$. Такая устойчивость практически достигается при $c_1(0, \infty|0) = c_1(15, 65|0)$, т.е. при совпадении средних возрастов всего населения и указанного контингента ($15 \leq x \leq 65$), ($k=0$). Естественно, в будущем при существенной эволюции $l(x, t)$ в процессе демоэкономического гомеостаза границы активного контингента ($\alpha=15, \beta=65$) изменятся.

3. ФУНКЦИИ ВЫЖИВАНИЯ И САЛЬДО ПРОДУКТИВНОСТИ НАСЕЛЕНИЯ

Управление функциями выживания $l(x)$ повлияет на массы «полезного» и «убыточного» времени жизни. Хотя такая оценка существования населения узкоэкономическая, она тем не менее признается важной [7, 9, 10]. Математическая теория этого вопроса (особенно в динамическом варианте) разработана совершенно недостаточно, хотя еще в прошлом веке был сделан ряд попыток экономической оценки отдельных человеческих контингентов [9] (примеры таких оценок можно найти, например, в [11]). Интересен вопрос, сохранится ли определенное, в частности, экономическое равновесие потребления и производства при различных функциях выживания $l(x)$? Для ответа необходимо построить систему обобщенных поперечных и продольных характеристик демоэкономического движения.

Оценим экономическую эффективность существования населения (поперечный анализ) через удельное сальдо продуктивности $v(t, 0)$, равное отношению разности dC между созданной dC_+ и потребленной dC_- стоимостями всем населением в $(t, t+dt)$ к суммарному времени жизни населения в $(t, t+dt)$, т. е. к $P(t)dt$ (с точностью до малых второго порядка). Вводя накопленное в t к возрасту x сальдо $\bar{C}(x, t)$ (одна черта сверху — усреднение по возрасту, две — двойное усреднение: сначала по населению в пределах данного возраста, затем по возрастной структуре населения), представим $v(t, 0)$

$$v(t, 0) = P^{-1}(t) \frac{d\bar{C}}{dt} = \int_0^{\infty} \varphi(x, t) \frac{\partial \bar{C}(x, t)}{\partial x} dx. \quad (33)$$

Здесь $\bar{C}(x, t)$ как результат усреднения индивидуальных $C_i(x, t)$ полагаем (пренебрегая высокочастотным «иглольчатым» шумом) дифференцируемой по x функцией. Поперечная $v(t, 0)$ — частный случай (при $\tau \rightarrow 0$) продольной характеристики $v(t, \tau)$, равной отношению сальдо продуктивности населения в $[t, t+\tau]$ к его общей временной массе жизни

$$v(t, \tau) = \left[\int_t^{t+\tau} P(z) dz \right]^{-1} \int_t^{t+\tau} P(z) dz \int_0^{\infty} \varphi(x, z) \frac{\partial \bar{C}(x, z)}{\partial x} dx. \quad (34)$$

Для демоэкономически стабильного в $[t, t+\tau]$ населения ($\varphi(x, z)$, $\bar{C}(x, z) = \varphi(x, t)$, $\bar{C}(x, t)$) поперечная $v(t, 0)$ совпадает с продольной $v(t, \tau)$ и в этом смысле можно говорить об эргодичности демоэкономического движения. Очевидны условия, при которых эта эргодичность может нарушаться. Дополнительной характеристикой экономической оценки совокушности живущих в момент t может быть отношение $\hat{v}(t, \infty)$ их остаточного суммарного сальдо продуктивности к суммарному времени дожития. По своей структуре $\hat{v}(t, \infty)$ — продольная характеристика

$$\hat{v}(t, \infty) = \frac{\int_0^{\infty} \varphi(x, t) l^{-1}(x, t-x) dx \int_0^{\infty} [\bar{C}(x+\xi, t+\xi) - \bar{C}(x, t)] \frac{\partial}{\partial \xi} l(x+\xi, t-x) d\xi}{\int_0^{\infty} \varphi(x, t) l^{-1}(x, t-x) dx \int_x^{\infty} l(z, t-z) dz} \quad (35)$$

Здесь $l(x+\xi, t-x)l^{-1}(x, t-x)=l(\xi, x, t)$ — вероятность для человека, имеющего возраст x в момент t , прожить время, большее ξ ; $l(\xi, x, t)=1$ при $\xi=0$ и монотонно убывает до 0 при $\xi \rightarrow \infty$. Для стабильного населения и при условии $\bar{C}(x, z)=\bar{C}(x, t)$ для $z>t$ выражение существенно упрощается. Действительно, заменяя $\varphi(x, t)$ выражением $\varphi(x, 0, \infty)$ (28), а $x+\xi$ на z , имеем

$$\hat{v}(t, \infty|k) = \frac{\int_0^{\infty} \exp(-kx) dx \int_x^{\infty} [\bar{C}(z, t) - \bar{C}(x, t)] l'(z) dz}{\int_0^{\infty} \exp(-kx) dx \int_x^{\infty} l(z) dz} \quad (36)$$

Интегрируя по частям в числителе и знаменателе, окончательно представим $\hat{v}(t, \infty|k)$

$$\hat{v}(t, \infty|k) = \frac{\int_0^{\infty} l(x) [1 - \exp(-kx)] \frac{\partial \bar{C}(x, t)}{\partial x} dx}{\int_0^{\infty} l(x) [1 - \exp(-kx)] dx} \quad (37)$$

Для стационарного населения ($k=0$) получаем, раскрывая неопределенность в (37)

$$\hat{v}(t, \infty|0) = \frac{2}{\mu_2} \int_0^{\infty} xl(x) \frac{\partial \bar{C}(x, t)}{\partial x} dx = - \frac{2}{\mu_2} \int_0^{\infty} \bar{C}(x, t) [l(x) + xl'(x)] dx \quad (38)$$

Для сравнения выпишем поперечные характеристики (33) $v(t, 0|k)$ и $v(t, 0|0)$ в стабильном и стационарном населении

$$v(t, 0|k) = \frac{\int_0^{\infty} l(x) \frac{\partial \bar{C}(x, t)}{\partial x} \exp(-kx) dx}{\int_0^{\infty} l(x) \exp(-kx) dx} \quad (39)$$

$$v(t, 0|0) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} l(x) \frac{\partial \bar{C}(x, t)}{\partial x} dx = - \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\infty} \bar{C}(x, t) l'(x) dx \quad (40)$$

Интересно, что даже для стационарного населения $v(t, 0|0) \neq \hat{v}(t, \infty|0)$, и следовательно, вся будущая экономическая «судьба» живущих в момент t не отражает эффективности населения как восстанавливаемой системы на любом интервале $(t, t+\tau)$. Для стационарного населения $v(t, 0) = v(t, \tau)$. Данное равенство может выполняться и для стабильной совокупности слабо стареющих машин, где в первом приближении $\frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \text{const}$. Вообще же, характеристики поведения демоэкономических ансамблей из живых и смертных частиц значительно более разнообразны и

сложны, нежели физических ансамблей из неживых частиц.
Разложим (39) в ряд по темпу k

$$v(t, 0|k) = v(t, 0|0) + \frac{\mu_2}{2\mu_1} [v(t, 0|0) - \hat{v}(t, \infty|0)]k + \dots \quad (41)$$

Отсюда видно, что рост населения ($k > 0$) экономически выгоден, если $v(t, 0|0) > \hat{v}(t, \infty|0)$. В противном случае с ростом населения удельное сальдо продуктивности $v(t, 0|k)$ уменьшается. Возрастной характер сальдо $\bar{C}(x)$ (в относительных единицах) показан на рис. 2. Максимум $\bar{C}(x)$ достигается в x_E близкой к μ_1 , AB , BF — выпуклые вниз и вверх участки

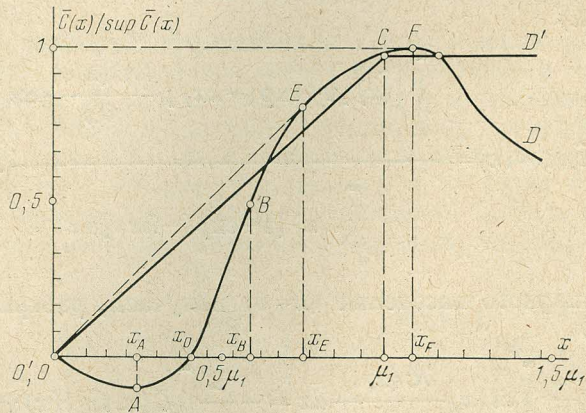


Рис. 2. $OABCD$ — зависимость накопленного к возрасту x усредненного сальдо продуктивности $\bar{C}(x)$: $O'CD'$ — кусочно-линейная аппроксимация; μ_1 — средняя длительность жизни

$\bar{C}(x)$. При $x = x_B$ имеется перегиб, где достигается наибольшее значение $\bar{C}'(x)$, $x_B \approx 40$ лет. Нулевые значения $\bar{C}'(x)$ достигаются при $x = x_A$, x_F , близких сейчас к 15 и 65 годам. При $\bar{C}(x, z) = \bar{C}(x, t)$, где $z > t$ для всех критериев v , справедлива простая оценка, не зависящая от $l(x)$, а именно: v не превосходит максимума $\frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$. Для оценки влияния $l(x)$ на v целесо-

образно использовать графоаналитические соображения. Так как $\mu_1 \gg x_E$ (рис. 2), то среднее от $\bar{C}(x)$ (40) не превосходит $\bar{C}(\mu_1)$, и следовательно, $v(t, 0) < \mu_1^{-1} \bar{C}(\mu_1)$ (по существу — это неравенство Йенсена). Основной вклад в интеграл (40) вносится в окрестности μ_1 , где наиболее значительны $\bar{C}(x)$ и плотность распределения $f(x) = -l'(x)$, что позволяет предложить расчетную формулу для $v(t, 0)$ в стационарном населении

$$v(t, 0) = \xi \mu_1^{-1} \bar{C}(\mu_1), \quad 0 < \xi < 1. \quad (42)$$

Принимая для $\bar{C}(x)$ непрерывную кусочно-линейную аппроксимацию $O'CD'$ (рис. 2)

$$\bar{C}(x) \approx \begin{cases} \bar{C}(\mu_1) \left(1 + \frac{x - \mu_1}{T} \right), & 0 \leq x \leq \mu_1, \\ \bar{C}(\mu_1), & \mu_1 < x < \infty, \end{cases} \quad (43)$$

имеем для ξ

$$\xi = 1 - \frac{1}{T} \int_{\mu_1}^{\infty} l(x) dx. \quad (44)$$

Внешне большие отклонения аппроксимации (43) от $\bar{C}(x)$ в $[0, x_B]$ несущественны, так как вклад этого интервала возрастов в интеграл (40) около 1% (малые значения плотности $f(x)$). Принимая для « λ -характеристики» смертности аппроксимацию Гомпертца с параметрами a и b [2], можно выразить ξ через табличную интегральную показательную функцию $-Ei(-x)$ [12] и оценить ξ . Так, при $a=3,32 \times 10^{-4}$ единиц в год, $b=7,06 \times 10^{-2}$ единиц в год (мужчины, 1959–1960 г., СССР, см. [2]) получено $\xi=0,87$. Из оценок следует, что фактор $\mu_1^{-1}\bar{C}(\mu_1)$ — основной в удельном сальдо продуктивности. Аналогично при аппроксимации (43) имеем для $\hat{v}(t, \infty)$ в стационарном населении

$$\hat{v}(t, \infty) \simeq T^{-1}\bar{C}(\mu_1) \left[1 - \frac{2}{\mu_2} \int_{\mu_1}^{\infty} xl(x) dx \right]. \quad (45)$$

При $T=\mu_1$ оценка $\hat{v}(t, \infty)$ меньше, чем оценка $v(t, 0)$. Это неравенство для оценок наблюдалось и при T , несколько меньших μ_1 , в результате численного интегрирования (44), (45).

Следует полагать, что снижение $\lambda(x)$ во всех возрастах и соответственно повышение $l(x)$ не вызовут существенного ухудшения $v(t, 0)$. Увеличение средней длительности жизни μ_1 приведет (после переходного процесса) к той же форме $\bar{C}(x)$ (рис. 2) с некоторым удлинением выпуклой ветви. При этом одновременно возрастут $\bar{C}(\mu_1)$ и μ_1 , так что фактор $\mu_1^{-1}\bar{C}(\mu_1)$ останется неизменным или немного уменьшится, что, кстати, компенсируется увеличением ξ (44).

Итак, с узкоэкономической точки зрения продление длительности жизни (речь идет лишь о постепенном эволюционном процессе с реализацией геронтологического идеала: «добавить жизнь к годам, а не годы к жизни») не должно привести к серьезным нарушениям социальной структуры. Существенны здесь и вопросы методологии, возможности проникновения объективных научных методов, в частности экономико-статистических, в область, где традиционно господствовали философские интерпретации индивидуальных жизнеощущений (см., например, [13]). Вместе с тем независимо от частных экономико-статистических оценок представляется весьма убедительным и нравственно-экономический аргумент [14] общественной благодарности человеку за возможность неполного возврата беспроцентного кредита, даваемого его жизнью.

4. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СМЕРТНОСТИ И ИХ ИНСПЕКЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Для теоретической демографии особый интерес представляют не частные механизмы сложнейших физиологических регуляций, их возрастных изменений [15–24], а основные принципы, логические структуры теорий старения с точки зрения возможности их адекватного количественного макромоделирования и объяснения как исторически устойчивых фактов смертности, так и ее сравнительно кратковременных трендов. Очевидно, построение демографических биостатистических моделей смертности предполагает выбор некоторой общей логической основы, инспекцию большого числа качественных концепций старения [15–22]. Мы полагаем, что ре-

лизация программы математической инспекции (фильтра) логических структур качественных теорий, концепций старения возможна в рамках методов современной теории надежности. Общая идея такого фильтра проста: множество качественных концепций старения формализуется, устанавливается логически соответственный тип функции выживания $l(x)$, а вытекающие отсюда следствия сопоставляются с совокупностью взаимосогласованных фактов демографической статистики смертности. Наметим, хотя бы кратко, эти возможности.

Концепция истощения «жизненного запаса». Древнейшая попытка объяснения механизма старения и смерти — представление о постепенном расходовании некоторой субстанции с возрастом, т. е. представление типа: «Что-то теряется, изнашивается» [15]. У Аристотеля это — «прирожденное тепло», у Гиппократов — «природный жар». Такие представления обнаруживают удивительную историческую устойчивость. В XVIII в. — «жизненный запас» (Бюкли), «творческая энергия» (Пфлюгер). Далее, в XIX в. — «жизненная сила» Ю. Либиха, «регулирующая сила» К. Бернара. В начале XX в. — предельный видовой «энергообмен» Рубнера, а в середине — «адаптационная энергия» Г. Селье [16]. Возможно, психологические основания этих концепций в навязчивости аналогий с процессами «износа», «усталости» вещей (подчеркнем, что эти процессы имеют различный, ограниченный и определенный физико-статистический смысл [5, 17]).

На уровне целого организма концепциям «истощения» соответствует одномерная модель положительного монотонно убывающего непрерывного по времени (возрасту) случайного процесса. Момент достижения нулевого уровня — смерть. По существу, это частный случай модели $R-S$, где R — прочность; S — нагрузка [25]. Вводя скорость $\xi(x) > 0$, можно представить

$$R(x) = R(0) - \int_0^x \xi(z) dz. \quad (46)$$

Стационарность $\xi(x)$ соответствует примерно линейному характеру угасания физиологических функций с возрастом [19, 26]. Плотность распределения $g(\xi, \omega)$ для $\xi(x)$ содержит случайный вектор ω , отражающий «врожденные» свойства организмов. Для группы особей $(\omega, \omega + d\omega)$ функция выживания $l(x, \omega)$ определяется как вероятность события $R(x) > 0$. С учетом высокочастотности $\xi(x)$ для $R(x)$ можно принять нормальное распределение с параметрами

$$M\{R(x|\omega)\} = M\{R(0|\omega)\} - xM\{\xi(x|\omega)\}, \quad (47)$$

$$D\{R(x|\omega)\} = D\{R(0|\omega)\} + 2D\{\xi|\omega\} \int_0^x (x-z)\rho(z) dz, \\ \rho(0) = 1, \rho(\infty) = 0, \quad (48)$$

что дает

$$l(x, \omega) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{M\{R(x|\omega)\}}{\sqrt{2D\{R(x|\omega)\}}} \right) \right]. \quad (49)$$

Распределение такого типа предлагалось для стационарного случая в [17], для нестационарного — в [5]. В случае дискретного времени аналогичный подход предложен еще в 1926 г. [27], причем убывающая случайная последовательность R_n интерпретировалась как угасающая «жизненная энергия». Для популяции $l(x)$ находится рандомизацией (усреднением) $l(x|\omega)$ аналогично (14). Анализ предельных случаев модели (либо

только врожденные различия, либо только флуктуации жизнедеятельности [5]) дает для $l(x)$ « λ -характеристики» с максимумами λ_* и убывающими ($\lambda_* > \lambda(\infty) \geq 0$) правыми ветвями. Это, а также структура $l(x)$ исключают возможность соответствия фактам демографической статистики, что, видимо, достаточно для отклонения концепций «исчерпания» (в целом).

Концепции накопления «дефектов», «ошибок», «повреждений». По своей логической структуре модели «накопления» близки к моделям «исчерпания», если только речь идет о целом организме, а не локальных молекулярных механизмах (накопление генетических шумов [28] и т. п.). Формализация представлений о накоплении повреждений с учетом стационарностей [5] и функций памяти [29] с помощью стохастических сумм или непрерывных случайных процессов приводила обычно к $\lambda(x)$ с мягким максимумом и убыванием, часто до нуля, с увеличением возраста x , что не адекватно фактам демографической статистики (форме функции Гомпертца $G(x)$).

Стохастические и термофлуктуационные концепции. Общее достоинство таких концепций, как, например, А. Комфорта [18], Б. Стреллера [19], — ориентация на факты демографической статистики. А. Комфорт просто отождествил степень старения с « λ -характеристикой» и собрал обширные статистические материалы по функциям выживания $l(x)$, подчеркивая биологическую обусловленность их разнообразия. В термодинамической модели Стреллера — Милдвана [19] « λ -характеристика» $R_m = R_0 \exp(\alpha x)$ (принятая по Гомпертцу) отождествляется с вероятностью (по Больцману) $K \exp(-\Delta H/RT)$ превышения флуктуацией некоторой «энергии» определенного уровня ΔH (аналогичного энергии активации в химической кинетике). Отсюда сразу вытекает линейное убывание «жизненности» ΔH с возрастом x и обратная корреляция (реально наблюдаемая) между R_0 и α . Это — интересная, хотя и спорная аналогия, так как микромеханизм термофлуктуационных разрывов внутримолекулярных связей просто рассматривается в некотором обобщенном смысле как макромеханизм «поломов» полифункциональной системы целого организма. Кроме того, вряд ли целесообразно постулировать заранее линейность функции Гомпертца $G(x)$. Ее форма может быть достаточно сложной и существенно отклоняться от линейной (даже для возрастов $x > 20 \div 30$). В целом статистические идеи в [18, 19] группируются вокруг определения Медавара: «Старение есть понижение жизненных сил с возрастом, повышающее вероятность смерти от случайных причин». Определение такого типа предлагалось еще Бауэром [23], отметившим, что «между двумя крайними случаями — смертью от катастрофы и физиологической смертью — находятся случаи смерти от болезни с возрастающей (по возрасту) вероятностью». Заметим, что Бауэр вместо «жизненные силы» употреблял термин «свободная энергия», тяготея к термодинамическому истолкованию жизненных процессов. Эта линия развивается и сейчас [24] и представляется перспективной для выяснения природы хотя бы отдельных видовых (быть может, и индивидуальных) ограничений в функциях выживания $l(x)$. В целом мы, придерживаясь вероятностной концепции, полагаем, что структура « λ -характеристики» функции выживания должна получаться как следствие определенной стохастической теории функционирования множества частиц-организмов в норме и патологии. Ниже кратко излагается опыт построения такой теории.

5. ПОЛИФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ

Для целей демографического моделирования смертности данный подход излагался нами в [1, 5, 30], в полифункциональном варианте докладывался в [31]. Основное математическое и общебиологическое содержание его следующее. Пусть $q(x, x+\Delta x)$ — вероятность гибели элементов, достигших возраста x , в интервале $(x, x+\Delta x)$. Течению жизни сопоставляется дискретный поток точечных импульсов S_v различных типов v (рис. 3), моделирующий процесс отклонения организма от нормы (стрессы, болезни, травмы). Точечность импульсов — существенное упрощение,

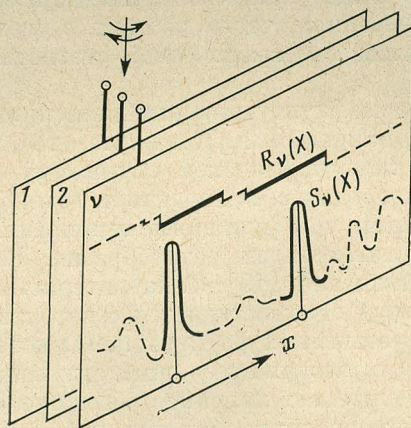


Рис. 3. Полифункциональная стохастическая модель выживания

оправданное значительным преобладанием по длительности нормы над патологией. Тип импульса S_v соответствует спровоцированной специфической структуре-состоянию резистентности R_v организма, включающей обычно и неспецифические элементы [16]. Если $\varphi_{vn}(x, \Delta x)$ — вероятность возникновения n импульсов типа v в $(x, x+\Delta x)$, а $w_{vn}(x) + o(\Delta x)$ — соответствующая усредненная по $(x, x+\Delta x)$ вероятность гибели, то

$$q(x, x+\Delta x) = 1 - \prod_{v=1}^m \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{vn}(x, \Delta x) (w_{vn}(x) + o(\Delta x)) \right]. \quad (50)$$

Полагаем поток импульсов типа v ординарным и вводим параметр потока $h_v(x)$

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} q(x, \Delta x) = \sum_{v=1}^m h_v(x) w_{v1}(x). \quad (51)$$

Принимаем, что $h_v(x)$ совпадает с интенсивностью потока (средней частотой импульсов). Это верно для простейшего нестационарного потока (ординарность, отсутствие последействия), для обычного процесса восстановления [32] с произвольной функцией распределения интервалов между импульсами, т. е. для процессов с ограниченным последействием. Можно показать (это существенно для демографического моделирования), что такое отождествление верно и при произвольной зависимости интервала между n -м и $(n+1)$ -м импульсами типа v от возраста, в котором имел место n -й импульс.

Положим $w_{11}(x) = 1$, обозначая $v=1$ катастрофы, исход которых однозначен независимо от возраста. При $v \geq 2$ интерпретируем $w_{v1}(x)$ как вероятность превышения «мощностью» нагрузки $S_v(x)$ адаптационной мощности $R_v(x)$. Это — простейшее унифицирующее описание. Далее $R_v(x)$ рассматривается как монотонно убывающий стохастический, определяемый низкочастотными онтогенетическими скачками — перестройками ξ_v — процесс

$$R_v(x) = R_v(x_0) - \sum_{k=0}^{N(x_0, x)} \xi_{vk}, \quad x \geq x_0. \quad (52)$$

Математическое ожидание и дисперсия $R_v(x)$ в предположении независимости $R_v(x_0)$, $N(x_0, x)$ и ξ_{vk}

$$M\{R_v(x)\} = C_v - H(x-x_0)A_v, \quad C_v = M\{R_v(x_0)\}, \quad A_v = M\{\xi_{vk}\}, \quad (53)$$

$$D\{R_v(x)\} = D_v + H(x-x_0)d_v, \quad D_v = D\{R_v(x_0)\}, \quad d_v = D\{\xi_{vk}\}, \quad (54)$$

где $M\{N(x_0, x)\} = H(x-x_0)$ отражает естественный процесс старения организма в состоянии нормы; $R_v(x)$ носит потенциальный характер, если ранее v — структура-состояние не провоцировалась. Ограничиваясь обычной асимптотикой теории восстановления, принимаем линейную зависимость $H(x-x_0) \simeq v_0(x-x_0)$, где v_0 — средняя частота онтогенетических скачков-перестроек, значительно меньшая, чем средняя частота патологических перегрузок порядка 10 единиц в год [1]. Возраст $x_0 = 20 \div 30$ лет соответствует времени завершения роста организма и началу развития процессов физиологического угасания. Итак, при $x > x_0$

$$M\{R_v(x)\} = C_v[1 - B_v(x-x_0)]; \quad B_v = v_0 A_v C_v^{-1}. \quad (55)$$

Теперь с учетом усреднения по внутрикогортным реализациям процессов $R_v(x)$

$$w_{v1}(x) = M\left\{ \int_{R_v(x)}^{\infty} p_v(\xi) d\xi \right\}. \quad (56)$$

Принимая $p_v(\xi)$ экспоненциальной с параметром α_v и ограничиваясь разложением экспоненты по разности $R_v - M\{R_v(x)\}$ до второго порядка включительно, имеем

$$w_{v1}(x) = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_v^2 D\{R_v(x)\} \right) \exp(-\alpha_v M\{R_v(x)\}). \quad (57)$$

С учетом (51) и полученных выше расшифровок $M\{R_v(x)\}$ и $D\{R_v(x)\}$ находим « λ -характеристику»

$$\lambda(x) = h_1(x) + \sum_{v=2}^m a_v(x) (E_v + F_v x) \exp(b_v x), \quad x \geq x_0, \quad (58)$$

$$a_v(x) = h_v(x) \exp[-\gamma_v(1 + B_v x_0)], \quad (59)$$

$$\gamma_v = \alpha_v C_v, \quad (60)$$

$$E_v = 1 + \frac{1}{2} \alpha_v^2 (D_v - v_0 x_0 d_v), \quad (61)$$

$$F_v = \frac{1}{2} v_0 d_v \alpha_v^2, \quad (62)$$

Таблица 2

Поведение «λ-характеристик» смертности населения СССР

№	1959—1960					1968—1971					1970/1960				
	мужчины		женщины			мужчины		женщины			мужчины		женщины		
	$\lambda_{1, M}(x)$	$\lambda_{1, M}(x) / \lambda_{1, M}(x-5)$	$\lambda_{1, M}(x)$	$\ln 1000 \lambda_{1, M}(x)$	$\lambda_{1, M}(x) / \lambda_{1, M}(x-5)$	$\lambda_{2, M}(x)$	$\lambda_{2, M}(x) / \lambda_{2, M}(x-5)$	$\ln 1000 \lambda_{2, M}(x)$	$\lambda_{2, M}(x)$	$\lambda_{2, M}(x) / \lambda_{2, M}(x-5)$	$\ln 1000 \lambda_{2, M}(x)$	$\lambda_{2, M}(x)$	$\lambda_{2, M}(x) / \lambda_{2, M}(x-5)$	$\ln 1000 \lambda_{2, M}(x)$	
10	0,00107					0,00067	1,34	-0,400	0,00047	0,98	-0,755	1,43	0,63	0,65	
15	0,00108	1,01	0,00072	0,288	1,04	0,00090	1,44	-0,405	0,00046	0,98	-0,776	1,96	0,83	0,61	
20	0,00201	1,86	0,00075	0,140	1,53	0,00190	1,75	0,683	0,00073	1,55	-0,315	2,72	0,99	0,63	
25	0,00270	1,34	0,00133	0,285	1,16	0,00282	2,03	1,037	0,00089	1,19	-0,116	3,17	1,04	0,67	
30	0,00323	1,20	0,00158	0,457	1,19	0,00379	2,04	1,332	0,00145	1,29	0,140	3,30	1,17	0,73	
35	0,00394	1,22	0,00190	0,642	1,20	0,00480	2,07	1,569	0,00163	1,42	0,489	2,94	1,22	0,86	
40	0,00504	1,28	0,00252	0,924	1,33	0,00620	2,00	1,824	0,00208	1,29	0,732	2,98	1,23	0,84	
45	0,00656	1,30	0,00323	1,172	1,28	0,00821	1,32	2,105	0,00314	1,51	1,144	2,61	1,25	0,98	
50	0,00972	1,48	0,00458	1,522	1,42	0,01099	1,34	2,397	0,00458	1,46	1,522	2,40	1,13	1,00	
55	0,01452	1,48	0,00659	1,886	1,44	0,01577	1,43	2,758	0,00664	1,43	1,893	2,38	1,09	1,0	
60	0,02167	1,49	0,00991	2,294	1,50	0,02254	1,43	3,115	0,00933	1,41	2,223	2,42	1,04	0,94	
65	0,03020	1,39	0,01580	2,760	1,60	0,03423	1,52	3,533	0,01638	1,76	2,796	2,09	1,03	0,94	
70	0,04343	1,44	0,02694	3,294	1,70	0,04783	1,40	3,868	0,02583	1,55	3,232	1,89	1,10	0,94	
75	0,06338	1,46	0,04486	3,803	1,67	0,07332	1,53	4,295	0,04878	1,93	3,888	1,50	1,15	1,09	
80	0,09332	1,47	0,07422	4,307	1,65	0,10947	1,49	4,696	0,08226	1,68	4,410	1,33	1,18	1,11	
85	0,13750	1,48	0,11367	4,734	1,53	0,15731	1,43	5,058	0,12728	1,55	4,847	1,24	1,14	1,09	
90	0,18880	1,48	0,15409	5,088	1,43	0,22283	1,42	5,406	0,18783	1,48	5,235	1,19	1,18	1,21	
95	0,24980	1,37	0,19840	5,290	1,40	0,31174	1,42	7,542	0,26940	1,43	5,596	1,15	1,25	1,36	
100	0,32130	1,29	0,24603	5,505	1,24	0,42400	1,36	6,050	0,38100	1,41	5,943	1,11	1,32	1,55	

$$b_v = \gamma_v B_v, \quad (63)$$

где γ_v можно интерпретировать как «запас прочности» в возрасте x_0 , определяемый для когорты отношением средней «прочности» к средней «нагрузке» типа v . В частном случае $b_v = b$, $d_v = 0$, $h_1(x) = c$, $h_v = \text{const}$ выражение (58) переходит в известную формулу Гомпертца — Макегама

$$\lambda(x) = a \exp(bx) + c. \quad (64)$$

Существенно, что при этом параметры a , b , c получают биостатистическую расшифровку и в отношении таких операциональных характеристик, как средняя частота патологических перегрузок, представляются возможности количественных оценок по данным статистики смертности (латентный анализ). Отметим еще один частный случай выражения (58), существенно более общий, чем формула Гомпертца — Макегама. Полагая $h_1(x) = c$, $h_v(x) = \text{const}$, $E_v = E$, $F_v = F$, получим

$$\lambda(x) = c + (E + Fx) \sum_{v=2}^m a_v \exp(b_v x). \quad (65)$$

Перейдем к анализу опыта смертности на примере СССР. В табл. 2 сведены рассчитанные по типовым таблицам смертности [33, 34] « λ -характеристики», а также ряд относительных величин, например $\lambda(x)/\lambda(x-h)$, позволяющих непосредственно оценить темп изменчивости $\lambda(x)$ в $[x-h, x]$ и степень выпуклости (вогнутости) функции $G(x) = \ln 1000 \lambda(x)$. Расчет точек $\lambda(x)$ проводился по методике [5], основанной на соотношении, аналогичном (12). При $\tau=1$ $\lambda(x)$ практически меньше $q(x, x+1)$ в домодалном возрасте и больше в послемодалном. Расчеты (табл. 2) $\lambda(x)$ по нашей методике этому контрольному требованию удовлетворяют.

На рис. 4 даны графики $G(x) = \ln 1000 \lambda(x)$ для мужчин и женщин СССР в двух поперечных срезах (1960 и 1970 гг.). Вогнутость $G(x)$ в интервале 25÷75 лет довольно характерна, резко выражена у женщин и в целом более смягчена в 1970 г. Характер вогнутости (выпуклости) отчетливо просматривается на графиках $\lambda(x)/\lambda(x-5)$ (рис. 5, 6, колонки 2, 5, 9, 12 табл. 2) и позволяет говорить об устойчивой тенденции к более сильному, нежели экспоненциальный, росту $\lambda(x)$ в домодалном и более слабому в послемодалном*. Отметим, что такая двояковыпуклость $G(x)$ вытекает из теоретической формулы (65). При x , близких к x_0 , множитель перед суммой близок к единице, смесь же экспонент с разными темпами дает возрастающий темп. При больших x сумма в (65) тяготеет к экспоненте с максимальным темпом, а наличие параметра c катастрофической смерти и функции $E + Fx$ (неравномерность внутрикогортного старения) определяют изменения кривизны $G(x)$ с вогнутости на выпуклость. На рис. 7 представлены графики отношений $\lambda(x)$ для мужчин и женщин (в поперечном и продольном разрезе). Превышение λ_m над $\lambda_{ж}$ в 1960 г. характеризовалось (кривая 1) наличием «плато», причем $\lambda_m/\lambda_{ж} \approx 2$ при $x=25\div65$ лет. В 1970 г. образовался резкий максимум этого отношения при $x \approx 30$ лет (кривая 2). Формально это объясняется одновременным повышением λ_m (кривая 3) при $x > 25$ лет и снижением $\lambda_{ж}$ при $x < 50$ лет (кривая 4). Характер убывания $\lambda_m/\lambda_{ж}$ в старших возрастах в целом соответствует факту большего темпа у $\lambda_{ж}$, нежели у λ_m . Укажем, что все отмеченные эволюционные изменения происходят на общем фоне достигнутой весьма низкой

* Аналогичный эффект наблюдался нами при расчетах характеристик $\lambda(x)/\lambda(x-h)$ по данным переписей Англии (1861—1931 гг.), а также при визуальном анализе ряда региональных $G(x)$ (УССР, ЛатССР).

смертности, при которой, например, медианная длительность жизни незначительно колеблется в условиях СССР для мужчин около 70,5 года, а для женщин — 78,5 лет. Вместе с тем повышение $\lambda(x)$ для мужчин, особенно в экономически активных возрастах, в сочетании с имевшими место волнами рождаемости может иметь негативные последствия в балансе трудовых ресурсов.

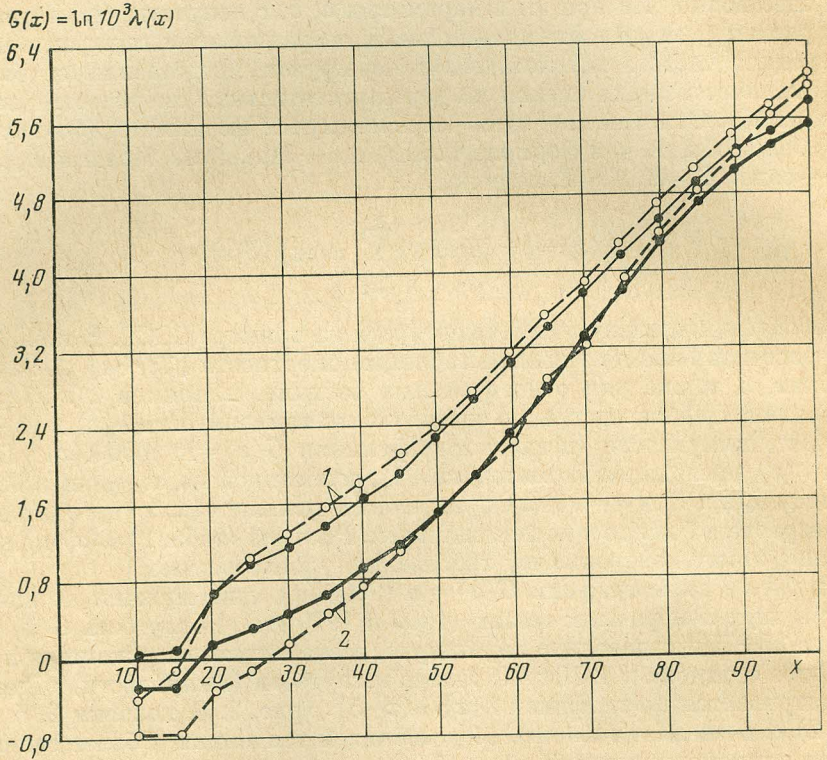


Рис. 4. Поведение логарифма $\lambda(x)$ для населения СССР: 1 — мужчины (1959—1960; 1968—1971), 2 — женщины (1959—1960; 1968—1971)

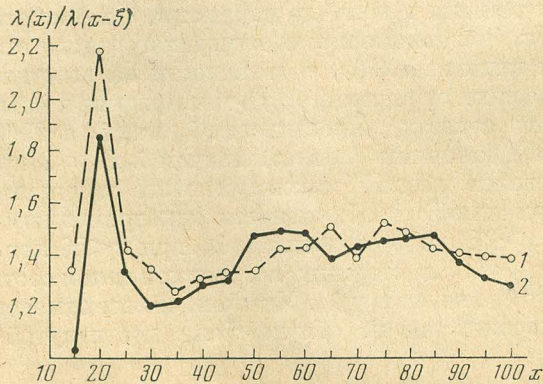


Рис. 5. Зависимость отношения $\lambda(x)/\lambda(x-5)$ от возраста x : 1 — мужчины (1970, СССР), 2 — мужчины (1960, СССР)

**6. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОЗМОЖНЫХ БИОСОЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ
УПРАВЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ЖИЗНИ**

Вся практика здравоохранения, социально-гигиенических мероприятий направлена на улучшение адаптации населения к меняющимся условиям биотехносферы, структуре стрессовых воздействий, заболеваний и, следовательно, в конечном счете на повышение выживаемости различных людских контингентов. Однако прогнозирование тенденций выживаемости на основе просто огромного списка социально-медицинских мероприятий, по-видимому, невозможно. В лучшем случае здесь применимы лишь качественные экспертные оценки. Построение биостатистических моделей типа рассмотренных выше несомненно полезно для задачи прогнозирования выживаемости в условиях сложнейших переплетений биологических и социальных процессов. Ограничимся одной оценкой, относящейся к гипотетической, но уже реально наметившейся возможности активного и достаточно массового управления скоростью старения (это — одна из основных

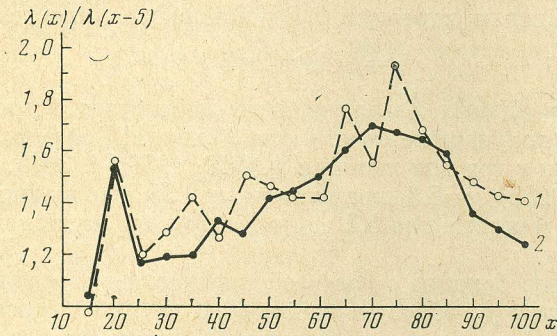


Рис. 6. Зависимость отношения $\lambda(x)/\lambda(x-5)$ от возраста x : 1 — женщины (1970, СССР), 2 — женщины (1960, СССР)

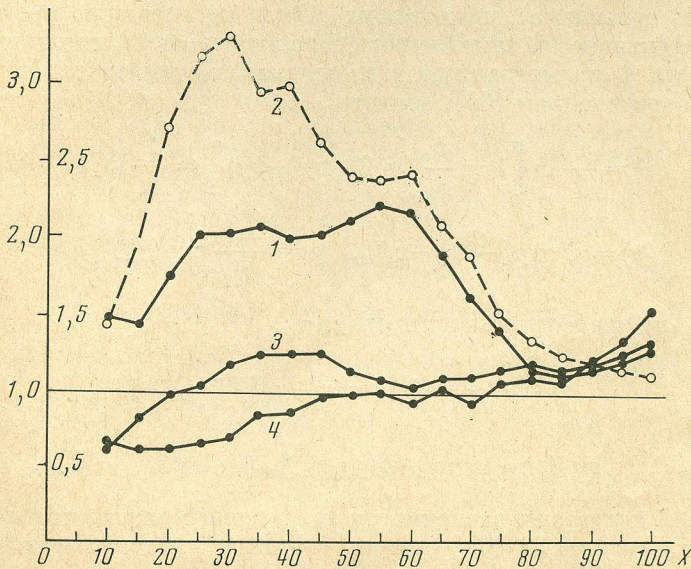


Рис. 7. Эволюция «λ-характеристик» смертности (СССР): 1 — $\lambda_m/\lambda_{ж}$ (1959—1960); 2 — $\lambda_m/\lambda_{ж}$ (1968—1971); 3 — $\lambda_{2, м}/\lambda_{1, м}$ (1970/1960); 4 — $\lambda_{2, ж}/\lambda_{1, ж}$ (1970/1960)

задач современной геронтологии). Для прогностических оценок эффективности управления скоростью старения целесообразна простейшая расшифровка $\lambda(x)$ в виде аппроксимации Гомпертца — Макегема (при $c=0$). Полагая $d_v=0$ и $b_v=b=\text{const}$, $h(x)=f_0=\text{const}$, в соответствии с (58) — (63) имеем

$$\lambda(x) = a \exp(bx), \quad x \geq x_0, \quad (66)$$

$$a = f \exp(-\gamma_0), \quad \gamma_0 = \gamma(1+Bx_0), \quad b = \gamma B, \quad (67)$$

$$f = f_0 \sum_{v=2}^m \xi_v E_v = f_0 \sum_{v=2}^m \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \delta_v^2 \xi_v \right). \quad (68)$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma = \alpha_v C_v, \quad \delta_v^2 = D_v / C_v^2, \quad \xi_v = h_v(x) / h(x). \quad (69)$$

Полагая коэффициенты вариации δ_v одинаковыми, упростим f

$$f = f_0 (1 + 1/2 \gamma^2 \delta^2), \quad (70)$$

где f_0 — частота реальных патологических перегрузок (стрессовых ситуаций), $f_0 < f$. Ранее полученные оценки для f были 11,7 единиц в год для мужчин и 14,4 единиц в год для женщин (СССР, 1959 [1, 30]). Это соответствует (при $B=0,0085$) $\gamma=8,3$ для мужчин и 9,35 для женщин. При $\delta=0,1$ оценка f_0 дает соответственно 8,7 единиц в год для мужчин и 10,1 единиц в год для женщин.

Регистрируемые болезни с частотой порядка 1—1,5 единиц в год дают заниженную оценку f_0 , образуя «надводную часть айсберга» патологических перегрузок. Здесь просматриваются возможности анализа скрытых параметров жизнедеятельности на основе комбинаций наблюдений и биостатистических моделей смертности.

Далее, не предопределяя содержание медико-биологических средств торможения старения (на всех уровнях молекулярного, клеточного, тканевого, целого организма), проходящих сейчас интенсивную проверку [35], оценим эффективность замедления скорости старения, начиная с некоторого возраста y , на медианную длительность $x_{0,5}(y)$ предстоящей жизни. При $\lambda(x)$, определенном (66), имеем

$$x_{0,5}(y) = \frac{1}{b} \ln \left[1 + \frac{b}{a} (\ln 2) \exp(-by) \right] = \frac{1}{b} \ln [1 + \theta(y)], \quad (71)$$

$$\theta(y) = \rho b \exp[-b(y-x_0)], \quad \rho = \frac{\ln 2}{f_0} \exp(\gamma), \quad y > x_0. \quad (72)$$

Для $x_{0,5}(y)$ справедливы асимптотики

$$x_{0,5}(y) \sim \frac{1}{b} \ln \rho b + x_0 - y, \quad \theta(y) \gg 1, \quad (73)$$

$$x_{0,5}(y) \sim \rho \exp[-b(y-x_0)], \quad \theta(y) \ll 1. \quad (74)$$

На рис. 8 построены зависимости $x_{0,5}(y)$ для мужчин при $a=3,01 \cdot 10^{-4}$ единиц в год и $b=7,32 \cdot 10^{-2}$ единиц в год (условия Латвийской ССР, 1969—1970 гг.) [36]. Отметим, что и для других регионов, например для УССР, получаются близкие оценки параметров a и b . Кривая 2 на рис. 8 дает аналогичную зависимость, но при сниженной на 30% скорости ста-

рения ($B=0,006$ вместо $B=0,0085$ при прочих равных условиях: $f_0, \gamma = \text{const}$). Из рис. 8 видно, что линейная асимптотика (73) оправдана вплоть до 50–60 лет, что и обуславливает примерно одинаковый абсолютный десятилетний выигрыш в медианном дожитии в возрастах до 50–60 лет. Далее этот абсолютный выигрыш медленно понижается, относительная эффективность управления скоростью старения оказывается тем самым возрастающей с возрастом. Так, при $y=30$ относительный выигрыш $51,5/40,7=1,26$, а при $y=50$ выигрыш $34/21,9=1,48$.

Отметим, что в режиме 1 в основном экономически активном возрасте 20–60 лет погибают 26,6%, а в режиме 2 (снижение скорости старения на 30%) — 19,6%. Таким образом, снижение скорости старения на 30% позволит спасти 7% численности всей когорты в экономически наиболее активных возрастах. Это — миллионы

жизней, ценность которых огромна даже по формальным экономическим оценкам. Но несомненно, что намечающийся прорыв в область активного биосоциального управления старением и смертностью имеет, кроме того, внеэкономическое, общенаучное и гуманистическое значение.

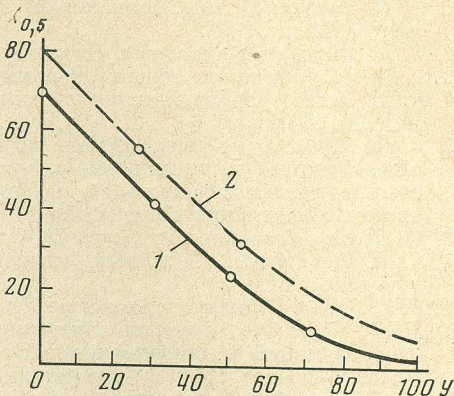


Рис. 8. Зависимость медианной длительности дожития мужчин от возраста y : 1 — $a=3,01 \cdot 10^{-2}$ единиц в год; $b=7,32 \cdot 10^{-2}$ единиц в год; 2 — скорость старения снижена на 30%, $a=5,8 \cdot 10^{-2}$ единиц в год; $b=5,15 \cdot 10^{-2}$ единиц в год

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Шукайло. К теории прогнозирования демоэкономических движений. Экономика и матем. методы, 1970, т. VI, вып. 3.
2. В. Ф. Шукайло. О некоторых общих математических вопросах теории надежности и демографической статистики. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 4.
3. А. Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.
4. Е. М. Андреев. О методике исчисления таблиц доживаемости. В сб. Продолжительность жизни. М., «Статистика», 1974.
5. В. Ф. Шукайло. О физическом обосновании и конструировании функций распределения теории надежности. В сб. Основные вопросы теории и практики надежности. М., «Сов. радио», 1974.
6. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., «Мир», 1975.
7. А. Г. Вишневский. Население и производство. В сб. Модели демографических связей. М., «Статистика», 1972.
8. Р. Пресса. Народонаселение и его изучение (демографический анализ). М., «Статистика», 1966.
9. В. Ц. Урланис. О проблемах экономической демографии. Вопросы экономики, 1970, № 5.
10. Э. Валкович. Производные экономические таблицы смертности населения Венгрии. В сб. Население и экономика, М., «Статистика», 1970.
11. Э. Энгель. Ценность человека. М., 1898.
12. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
13. И. И. Мечников. Этюды о природе человека. М., Изд-во АН СССР, 1961.
14. А. Я. Боярский. Население и методы его изучения. Сборник научных трудов. М., «Статистика», 1975.
15. В. В. Фролькис. Природа старения. М., «Наука», 1969.
16. Г. Селье. Очерки об адаптационном синдроме. М., Медгиз, 1960.
17. В. Ф. Шукайло. Некоторые вопросы теории восстановления и усталостной надежности механических элементов. В сб. Основные вопросы теории и практики надежности. М., «Сов. радио», 1966.

18. А. Комфорт. Биология старения. М., «Мир», 1967.
19. Б. Стреллер. Время, клетки и старение. М., «Мир», 1964.
20. И. В. Давидовский. Геронтология. М., «Медицина», 1966.
21. А. В. Назорный, В. Н. Никитин, И. Н. Буланкин. Проблема старения и долголетия. М., Медгиз, 1963.
22. В. Д. Михайлова-Лукашева. Биология старения. Минск, «Наука и техника», 1968.
23. Э. Бауэр. Физические основы биологии. М., 1930 (Мособлздравотдел).
24. А. И. Зотин. Термодинамический подход к проблемам развития, роста и старения. М., «Наука», 1974.
25. В. Ф. Шукайло. Классификация моделей «нагрузка – прочность» и обоснование типа функций распределения ресурсов механических элементов. В сб. Проблема надежности строительной механики. Вильнюс, 1968 (Республ. ин-т научно-технич. информации и пропаганды).
26. Ф. Бульер. Старение и старость. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
27. С. Н. Бернштейн. О кривых распределения вероятности. Собр. соч. Т. IV. М., «Наука», 1964.
28. С. Е. Бреслер. Физика и биология. Успехи физич. наук, 1975, т. 115, вып. 1.
29. В. Ф. Шукайло. К теории внутренних механизмов формообразования эмпирических функций в демографической статистике. В сб. Демографические тетради. Вып. 2—3. Киев, 1970 (Ин-т экономики АН УССР).
30. В. Ф. Шукайло. О вероятностной модели одного класса отказов элементов технико-демографической системы. В сб. Материалы VIII конференции Укр. заочн. политехн. ин-та. Харьков, 1968 (Харьк. ун-т).
31. В. Ф. Шукайло. К физико-статистической теории смертности населения. В сб. 9-й Международный конгресс геронтологов. Т. III. Киев, 1972.
32. Д. Кокс, В. Смит. Теория восстановления. М., «Сов. радио», 1967.
33. Итоги Всесоюзной переписи населения 1959 года. СССР. М., Госстатиздат, 1962.
34. Таблицы смертности населения СССР в 1968—1971 гг. Вестник статистики, 1974, № 2.
35. Т. Л. Дубинина, А. Н. Разумович. Введение в экспериментальную геронтологию. Минск, «Наука и техника», 1975.
36. П. П. Звидринш, В. Ф. Шукайло. Исследование динамических закономерностей смертности населения Латвийской ССР. Ученые записки Латв. гос. ун-та. Рига, 1976.

Поступила в редакцию
17 VI 1976